SIRKUL VA CHIZG'ICH YORDAMIDA YECHILMAYDIGAN KLASSIK MASALALAR

Jongishaliyev Jahongir Xusanboy o'g'li
NamDU Fizika- matematika fakulteti
Matematika yoʻnalishi 1-bosqich talabasi
Mahmudova Dilnoza Xaytmirzayeva
Ilmiy rahbar:
https://doi.org/10.5281/zenodo.15463096

Annotatsiya: Ushbu kurs ishida antik davrda shakllangan va zamonaviy matematikada katta ahamiyat kasb etgan sirkul va chizgʻich yordamida yechilmaydigan klassik masalalar tahlil qilingan. Geometriya tarixida yuzaga kelgan asosiy uchta muammo - kubni ikki barobar oshirish, burchakni uchga boʻlish va doira kvadraturasi muammolari haqida keng maʼlumot berilgan. Shuningdek, bu masalalarning tarixiy rivojlanishi, yechim imkoniyatlari va ularning imkonsizligi zamirida yotgan asosiy matematik tushunchalar, masalan, algebraik sonlar va konstruksiya nazariyasining oʻrni tahlil etilgan. Ishda Galois nazariyasi va u bilan bogʻliq isbotlar ham koʻrib chiqilgan.

Kalit soʻzlar: Geometriya, klassik masalalar, sirkul va chizgʻich, Galois nazariyasi, algebraik sonlar, konstruksiya, kvadratura, burchak uchga boʻlish, kubni ikki baravar qilish.

Qadimiy yunon matematiklari tomonidan boshlangan klassik geometriya bugungi kungacha saqlanib qolgan fundamental yoʻnalishlardan biridir. Evklidning mashhur asari - *Elementlar* (Miloddan avvalgi III asr) - geometriya fanining asosiy poydevorini yaratdi. Bu asarda sirkul va chizgʻich yordamida bajariladigan geometrik konstruksiyalar orqali koʻplab muhim natijalar isbotlangan. Antik matematiklar fikricha, ushbu ikkita oddiy vosita yordamida har qanday geometrik masalani yechish mumkin boʻlgan.

Shunga qaramay, miloddan avvalgi V–IV asrlarda uchta muhim muammo shakllandi, ular ming yillar davomida matematiklar ongini band etib keldi. Bular quyidagilardan iborat:

Kubni ikki baravar qilish (Delian masalasi): berilgan kubning hajmini ikki barobar oshiradigan yangi kub yasash;

Burchakni uchga boʻlish: ixtiyoriy burchakni teng uch qismga ajratish;

Doirani kvadratlarga aylantirish (kvadraturasi): doira yuzasiga teng yuzali kvadrat yasash.

Ushbu masalalar oʻz davrida diniy, falsafiy va ilmiy maʼnoga ega boʻlgan. Masalan, Delian masalasi yunonlar orasida Apollo xudosi gʻazabini tinchlantirish uchun geometrik echim topish zarurati bilan bogʻliq edi. Har bir masala soddadek tuyulsa-da, ularning umumiy holda sirkul va chizg'ich yordamida yechilmasligi bugungi kungacha o'z ilmiy qiymatini yo'qotmagan.

Antik davrda bu muammolarga ko'plab urinishlar qilingan. Platon, Arximed, Hipokrat kabi buyuk allomalar ularni echishga harakat qilishgan. Lekin faqat XIX asrga kelib, algebra va Galois nazariyasi rivojlanishi natijasida bu masalalarning imkonsizligi qat'iy isbotlandi. Bu isbotlar sonlar nazariyasi, algebraik va tranzendental sonlar haqidagi chuqur bilimlarga asoslangan.

Ushbu maqolada mazkur uchta masalaning har biri alohida ko'rib chiqilib, ularning sirkul va chizg'ich yordamida nima sababdan umumiy holda yechilmasligi zamonaviy matematik asoslar bilan izohlanadi. Shuningdek, bu muammolar orqali matematikaning turli sohalari-algebra, analitik geometriya, va sonlar nazariyasi-o'zaro qanday bog'lanishini ham kuzatamiz.

USLUB

Mazkur ilmiy maqolada klassik geometrik masalalarning sirkul va chizg'ich yordamida umumiy holda yechilmasligini asoslash uchun quyidagi matematik yondashuvlar va metodlar qo'llanildi.

Sirkul va chizg'ich yordamida bajariladigan konstruksiyalar Evklid geometriyasida quyidagi asosiy operatsiyalar orqali ifodalanadi:

- Berilgan ikkita nuqtani birlashtirish (to'g'ri chiziq chizish),
- Berilgan markaz va radius asosida aylana chizish,
- Chiziq va aylana, ikki aylana yoki ikki chiziq kesishgan nuqtani aniqlash.

Bu operatsiyalar orqali yaratiladigan nuqtalar to'plami faqat kvadrat ildizlar va to'g'ri bog'liqliklar orqali ifodalanadigan sonlarni qamrab oladi. Bunday konstruksiyalar natijasida hosil bo'ladigan nuqtalar koordinatalari kvadratik kengaytmalar orqali ifodalanadi.

Geometrik konstruksiyalarni algebraik jihatdan tahlil qilishda asosiy rolni quyidagilar o'ynaydi:

-Konstruksiya sonlari: sirkul va chizg'ich yordamida qurilishi mumkin bo'lgan nuqtalarning koordinatalari algebraik sonlar bo'lib, ular ketma-ket kvadratik ildizlar orqali olinadi.

-Galois nazariyasi yordamida, bunday sonlarning daraja kengaytmalari ustida tahlil olib boriladi. Masalan, kubni ikki barobar qilishda $\sqrt[3]{2}$ kabi kub ildizlar paydo bo'ladi, bu esa kvadratik kengaytmalar orqali ifodalanmaydi.

-Doirani kvadratlashda esa π soni paydo bo'ladi, u esa tranzendental son bo'lib, hech qanday algebraik tenglamaning ildizi emas.

Har bir masalaning yechilmasligi Galois nazariyasi va algebraik sonlar nazariyasiga tayanadi. Masalan:

1. Kubni ikki baravar qilish: $\sqrt[3]{2}$ soni kvadratik ildizlar orqali ifodalanmaydi.

2. Burchakni uchga bo‘lish: $\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$ ko‘pincha uchinchi darajali tenglamani qanoatlantiradi.

3. Doirani kvadratlash: π ning konstruksiya soni emasligi, uning tranzendental ekanligi (Lindemann – 1882).

Har bir masalaga oid klassik chizma sirkul va chizg‘ich yordamida tasvirlanadi. Shuningdek, ularning algebraik ifodalari grafigi yoki diagrammalari orqali mantiqiy ziddiyatlar ko‘rsatiladi.

Masalan:

-Kubni ikki baravar qilish:

Agar $a^3 = V$ bo‘lsa, unda yangi kub uchun $x^3 = 2a^3 \Rightarrow x = a \cdot \sqrt[3]{2}$ bu esa kvadrat ildizlar orqali ifodalanmaydi.

-Doirani kvadratlash:

$S = \pi r^2$ga teng bo‘lgan kvadratning tomoni $a = \sqrt{\pi r}$ bu esa π ning kvadrat ildizi orqali ifodalanishini talab qiladi.

NATIJALAR

Kubni ikki baravar qilish masalasi quyidagicha ifodalanadi: Berilgan kub hajmi $V = a^3$ bo‘lsa, unga hajm jihatidan teng bo‘lgan yangi kub qurilsin:

$$x^3 = 2a^3 \Rightarrow x = a \cdot \sqrt[3]{2}$$

Bu yerda $\sqrt[3]{2}$ ni sirkul va chizg‘ich yordamida qurish kerak bo‘ladi. Biroq bu son kvadrat ildizlar ketma-ketligi orqali hosil bo‘ladigan konstruksiya sonlari to‘plamiga kirmaydi.

Galois nazariyasiga ko‘ra:

$\sqrt[3]{2}$ — uchinchi darajali tenglama ildizi bo‘lib, darajasi 3 bo‘lgan kengaytmani talab qiladi, ya’ni kvadratik bo‘lmagan kengaytma. Shuning uchun u sirkul va chizg‘ich yordamida qurib bo‘lmaydi.

Illyustrativ chizma:

- Kubning bir tomonini chizish (masalan, $a = 1$)
- 2 hajmli kub qurilishi uchun zarur bo‘lgan tomon uzunligini topish ($x = \sqrt[3]{2}$)

Burchakni uchga bo‘lish – Trissaksiya muammosi

Ushbu masalada ixtiyoriy burchak θ ni uch teng qismga bo‘lish kerak, ya’ni $\frac{\theta}{3}$ ni sirkul va chizg‘ich yordamida qurish zarur.

Ammo ba’zi burchaklar uchun bu mumkin emas:

Masalan, $\theta = 60^0$ bo‘lsa:

$\cos\left(\frac{60^0}{3}\right) = \cos(20^0)$ qiymat uchinchi darajali algebraik tenglama ildizi bo‘lib, u ham kvadratik konstruksiya soni bo‘la olmaydi.

Illyustrativ chizma:

- Burchak $\angle AOB = 60^0$
- Uni teng 3 qismga bo‘lishga urinish
- $\cos(20^0)$ sonining qurib bo‘lmasligi

Doirani kvadratlash – π ning tranzendental xossasi

Bu masalada, radiusi r bo‘lgan doiraning yuzasi bilan teng yuzali kvadrat qurish kerak:

$$S = \pi r^2 \Rightarrow a^2 = \pi r^2 \Rightarrow a = r\sqrt{\pi}$$

1882-yilda Lindemann tomonidan isbot qilinganidek, π — tranzendental son, ya’ni u hech qanday algebraik tenglamaning ildizi emas. Shuning uchun $\sqrt{\pi}$ sonini sirkul va chizg‘ich yordamida qurib bo‘lmaydi.

Illyustrativ chizma:

- Radiusi r bo‘lgan doira chiziladi
- Teng yuzali kvadrat qurishga urinish
- Konstruktsiya nuqtalarining koordinatalari π ga bog‘liq bo‘lganligi sababli amalda bajarib bo‘lmaydi

MUNOZARA

Yuqoridagi masalalar, xususan burchakni uchga bo‘lish (trisektsiya), kvadratni doiraga aylantirish va kubni ikki barobar qilish muammolari qadim yunon matematikasida markaziy o‘rin tutgan. Bu masalalar faqat chiziq va doira yordamida, ya’ni faqat sirkul va lineyka orqali yechilishi kerak degan cheklov asosida ko‘rib chiqilgan. Bunday yondashuv ko‘p asrlar davomida matematiklarni bu muammolarning yechimlarini topishga undagan, ammo ko‘plab sinovlarga qaramay, ularning yechilmasligi faqat 19-asrda qat’iy isbotlandi.

Bu yerda Galois nazariyasining o‘rni beqiyosdir. Fransuz matematigi Évariste Galois algebraik tenglamalarning ildizlarini konstruksion usulda yechilishini simmetriya va guruh nazariyasi orqali o‘rgandi. Natijada, u ko‘rsatdiki, ba’zi geometrik muammolar tegishli algebraik tenglamalar orqali ifodalansa-da, bu tenglamalarning ildizlari radikal orqali ifodalanmaydi. Aynan burchakni uchga bo‘lish muammosi kublik tenglama orqali ifodalanadi, va umumiy holda bu tenglama konstruktiv yechimga ega emas. Demak, Galois nazariyasi asosida ushbu muammoning klassik usullar bilan yechilmasligi qat’iyan isbotlangan.

Soddalashtirilgan chizma:

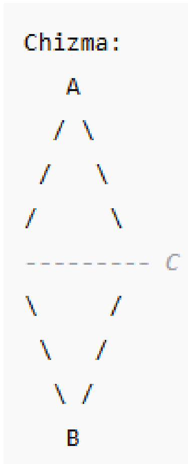
Quyidagi soddalashtirilgan chizma burchakni uchga bo‘lish muammosini tushunishga yordam beradi:

ACB burchagini uch teng qismga bo‘lish uchun sirkul va lineykadan foydalanish kerak.

Izoh: Garchi ba’zi burchaklar (masalan, $90°, 180°$ kabi) osonlik bilan uchga bo‘linishi mumkin bo‘lsa-da, umumiy burchaklar uchun bu har doim ham mumkin emas. Masalan, $60°$ burchakni uchga bo‘lish (ya’ni $20°$ hosil qilish) klassik konstruksiya vositalari bilan amalga oshirilmaydi.

XULOSA

Ushbu klassik masalalar -doirani kvadratlash, kubni ikki baravar qilish va burchakni uchga bo‘lish-qadimgi yunon matematikasining eng muhim muammolaridan bo‘lib, ming yillar davomida ko‘plab olimlarni o‘ziga jalb etgan. Bu muammolar soddaligi bilan birga, ularni faqat sirkul va lineyka yordamida yechish sharti tufayli, chuqur matematik tahlilni talab qilgan.



Ushbu masalalarning yechilmasligi esa faqat tajriba yoki tasavvur orqali emas, balki qat’iy matematik isbot orqali tasdiqlangan bo‘lib, bu isbotlar 19-asrda algebra va sonlar nazariyasidagi ulkan yutuqlar, ayniqsa Galois nazariyasi, filds nazariyasi va algebraik darajalar tushunchalariga tayangan. Bunday yondashuvlar nafaqat klassik geometriyadagi muammolarni aniqlik bilan tahlil qilishga imkon berdi, balki umumiy matematik tafakkur doirasini kengaytirdi.

Shu jihatdan, ushbu masalalar faqat tarixiy qiziqish obyekti emas, balki matematik mantiq, chegaralar va imkoniyatlar haqida chuqur tushuncha hosil qilishda bugungi kunda ham katta ahamiyat kasb etadi. Ular zamonaviy matematikani o‘rganuvchilar uchun imkonsizlikni isbotlash, algebra-geometriya bog‘liqligini anglash va nazariy asoslarni mustahkamlash kabi jarayonlarda muhim o‘quv materiali bo‘lib xizmat qiladi.

Shuningdek, bu muammolar orqali inson tafakkurining tarixiy rivojlanishini, matematik yondashuvlar qanday murakkablik darajasiga yetganini kuzatish mumkin. Shu sababli, ular faqat yechilmaydigan muammolar emas, balki matematik tafakkurning eng ulug‘ yutuqlaridan biri sifatida e’tirof etiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Anvarova, M., & Mahmudova, D. (2025). THE APPLICATION OF ECOND-ORDER CURVES. В THEORETICAL ASPECTS IN THE FORMATION OF PEDAGOGICAL SCIENCES (Т. 4, Выпуск 5, сс. 188–191). Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.15104205
2. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). TEKISLIKDA TO'G'RI CHIZIQ TENGLAMALARI VA ULARNI AMALIYOTGA TADBIQI. В THEORETICAL ASPECTS IN THE FORMATION OF PEDAGOGICAL SCIENCES (Т. 4, Выпуск 7, сс. 35–40). Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.15167776
3. Karimberdiyeva, D., & Mahmudova, D. (2025). TEKISLIKDAGI PERSPEKTIV-AFFIN MOSLIKNING O'ZIGA XOS XUSUSIYATLARI. В DEVELOPMENT OF PEDAGOGICAL TECHNOLOGIES IN MODERN SCIENCES (Т. 4, Выпуск 3, сс. 114–117). Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.15123521
4. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). NUQTADAN TO'G'RI CHIZIQQACHA BO'LGAN MASOFA. IKKI TO'G'RI CHIZIQ ORASIDAGI BURCHAK. В THEORETICAL ASPECTS IN THE FORMATION OF PEDAGOGICAL SCIENCES (Т. 4, Выпуск 7, сс. 74–78). Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.15186643
5. Ismoilova D., & Mahmudova, D. (2025). KO‘P O‘LCHOVLI YEVKLID FAZOSI: O‘QITISH TEXNOLOGIYASI ASOSIDA YONDASHUV. Innov. Conf. Published online April 17, 2025:1-7. Accessed April 18, 2025.
6. Mamatkadirova Zebo Tohirjon qizi, & Dilnoza Xaytmirzayevna Maxmudova. (2025). CONSTRUCTING AN ELLIPSE USING CONJUGATE DIAMETERS AND ITS APPLICATIONS. International Scientific and Current Research Conferences, 1(01), 48–55. Retrieved from https://orientalpublication.com/index.php/iscrc/article/view/1840