ISSIQLIK TARQALISH TENGLAMASI UCHUN TESKARI MASALALAR

Topvoldiyev Asadbek Nishonboy o'gli
topvoldievasadbek@gmail.com
Tojimatov Inomjon Ikromjon o'gli
Tojimatovinomjon13@gmail.com
Farg'ona Davlat Universiteti 3-kurs talabalari,
https://doi.org/10.5281/zenodo.15671827

Annotatsiya:

Ushbu maqolada issiqlik tarqalish tenglamasining teskari masalalari tahlil qilinadi. Asosiy e'tibor, ma'lum bir vaqt va joyda o'lchangan harorat ma'lumotlari asosida dastlabki harorat taqsimotini aniqlashga qaratilgan. Ishda issiqlik tarqalish tenglamasining ikkinchi chegaraviy masalasi misolida teskari masalaning matematik qo'yilishi va uning xususiyatlari ko'rib chiqiladi. Shuningdek, noaniq va cheklangan o'lchov ma'lumotlari asosida barqaror yechim olish uchun qo'llaniladigan yondashuvlar muhokama qilinadi. Bu teskari masala amaliyotda haroratni nazorat qilish, materiallarning issiqlik xususiyatlarini o'rganish va sanoat jarayonlarini optimallashtirishda muhim ahamiyatga ega.

Kalit so'zlar:

Issiqlik tarqalish tenglamasi, teskari masala, to'g'ri masala, boshlang'ich shart, chegaraviy shartlar, harorat taqsimoti, barqarorlashtirish, noaniqlik, matematik modellashtirish, regulyarizatsiya, fizik parametrlarni tiklash.

Abstract:

This article focuses on inverse problems related to the heat conduction equation. The main objective is to determine the initial temperature distribution based on temperature measurements taken at specific points in time and space. Using the example of the second boundary value problem for the heat equation, the mathematical formulation and characteristics of this inverse problem are examined. The study also discusses approaches for obtaining stable solutions when data is incomplete or noisy. Such inverse problems are crucial in practical applications such as temperature control, studying thermal properties of materials, and optimizing industrial processes.

Keywords:

Heat conduction equation, inverse problem, direct problem, initial condition, boundary conditions, temperature distribution, stabilization, uncertainty, mathematical modeling, regularization, parameter reconstruction.

Аннотация:

В данной статье рассматриваются обратные задачи для уравнения теплопроводности. Основная цель — определить начальное распределение температуры на основе измерений температуры в определённых точках времени и пространства. На примере задачи с вторыми краевыми условиями для уравнения теплопроводности исследуются математическая постановка и особенности данной обратной задачи. Также обсуждаются методы получения устойчивых решений при наличии неполных или зашумлённых данных. Такие обратные задачи имеют важное практическое значение для контроля температуры, изучения тепловых свойств материалов и оптимизации технологических процессов.

Ключевые слова:

Уравнение теплопроводности, обратная задача, прямая задача, начальное условие, краевые условия, распределение температуры, стабилизация, неопределённость, математическое моделирование, регуляризация, восстановление параметров.

Issiqlik tarqalish jarayonlari ko‘plab tabiiy va texnik tizimlarda asosiy ahamiyatga ega bo‘lib, ularni tushunish va boshqarish ko‘plab sohalarda muhim vazifa hisoblanadi. Masalan, sanoat jarayonlarida, materiallarni isitish yoki sovutish tizimlarida, elektron qurilmalarning issiqlik boshqaruvida, ekologiyada yer osti suvlarining haroratini aniqlashda hamda biologik tizimlarda issiqlik taqsimotini o‘rganishda issiqlik tarqalish tenglamasi asosiy matematik model sifatida qo‘llaniladi.Issiqlik tarqalish tenglamasi — bu vaqt va fazoda harorat taqsimotini ifodalovchi differensial tenglama bo‘lib, u orqali boshlang‘ich va chegaraviy shartlar asosida tizimning kelajakdagi holati yoki ma’lum vaqt oraliqdagi harorat taqsimoti hisoblanadi. Bu tenglama yordamida tuzilgan to‘g‘ri masalalarda tizimning boshlang‘ich sharti va chegara shartlari aniq beriladi va natijada harorat taqsimoti hisoblab chiqiladi. Biroq amaliy hayotda ko‘pincha barcha kerakli parametrlar, ayniqsa boshlang‘ich yoki chegaraviy shartlar to‘liq yoki aniq ma’lum bo‘lmaydi. Aksincha, tizimning turli nuqtalarida va turli vaqtlarda o‘lchangan harorat ma’lumotlari mavjud bo‘ladi. Ushbu noaniq va cheklangan ma’lumotlardan foydalangan holda tizimning boshlang‘ich holatini yoki issiqlik manbalarini aniqlash zarurati paydo bo‘ladi. Bu esa issiqilik tarqalish tenglamasi uchun teskari masalalar deb ataladi. Teskari masalalar ko‘pincha nokorrekt (yaxshi qo‘yilmagan) bo‘lib, ya’ni ular yechimining mavjudligi, yagona bo‘lishi va kirish ma’lumotlariga nisbatan sezgirligi jihatidan qiyinchiliklarga duch keladi. Masalan, o‘lchovlardagi kichik xatoliklar yoki

shovqinlar natijasida yechimda katta og'ishlar yuzaga kelishi mumkin. Shu sababli teskari masalalarning tahlili va yechimlarini barqarorlashtirish uchun maxsus matematik usullar — regulyarizatsiya usullari qo'llaniladi. Ayniqsa, Tixonov regulyarizatsiyasi kabi usullar amaliy va nazariy jihatdan keng qo'llaniladi.

To'g'ri masala. Ushbu

$$u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x < l, 0 < t < T, \quad (1)$$

$$\mathrm{u}(0,t) = u(l,t) = 0, 0 \le t \le T, \quad (2)$$

$$\mathrm{u}\left(\frac{l}{2}, t\right) = g(t) \quad (3)$$

$$u(\mathrm{x},0) = \varphi(\mathrm{x}), 0 \le \mathrm{x} \le \mathrm{l}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $u(\mathrm{x},\mathrm{t})$ funksiyani toping

Teskari masala.

$\mathrm{t} \in [t_0, t_1], t_0 > 0$ bo'lganda $g(\mathrm{t}) = \mathrm{u}(\mathrm{x}_0, \mathrm{t})$ funksiya berilgan, bu yerda $\mathrm{x}_0 - [0,l]$ kesmadagi biror fiksirlangan nuqta, $u(\mathrm{x},\mathrm{t})$ esa (1)-(3) masalaning yechimi. $[0,l]$ kesmada $\varphi(\mathrm{x})$ funksiyani topish talab qilinadi.

Bu teskari masalaning fizik talqini quyidagicha. Muayyan vaqt oralig'ida harorat sterjenning belgilangan nuqtasida o'lchanadi va bu o'lchovlardan dastlabki harorat taqsimotini aniqlash kerak.

(1)-(3) masalaning yechimi o'zgaruvchilarni ajratish usuli bilan olinishi mumkin va

$$u(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{l}\right) \mathrm{d}\xi \exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2 t\right\} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$$

ko'rinishga ega. Bu tenglikka $x = x_0$ qo'yib, $\varphi(\mathrm{x})$ funksiya uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{l}\right) \mathrm{d}\xi \exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2 t\right\} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = g(t) \quad (4)$$

tenglama hosil bo'ladi, bu yerda $\mathrm{t} \in [t_0, t_1]$.

O'lchov nuqtasi x_0 segment oxirida bo'lgan taqdirda (1) tenglama yechimining yagonaligini tekshiramiz.

1-teorema.

Agar $x_0 = 0$ bo'lsa, (1) tenglamaning yechimi $L_2[0,l]$ fazoda yagona bo'ladi.

Isbot.

(1) tenglamaning chiziqliligidan kelib chiqadiki, $L_2[0,l]$ fazoda yechimning yagonaligini isbotlash uchun $g(t) = \frac{2}{l} \exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2 z\right\}$. (4) tenglikka

$g(t)=\frac{2}{l}\exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2 z\right\}$.va $x_0=\frac{l}{2}, k\in(2n+1)(-1)^n$ qiymatlarni qo‘ysak, $t\in[t_0,t_1]$ da quyidagini olamiz.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi\exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2 t\right\}=\frac{2}{l}\exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2 t\right\}. \qquad (5)$$

Kompleks yarim tekislikda $\operatorname{Re} z\geq\alpha$

$$\Phi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}2\int_0^l \varphi(\xi)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi\exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2 z\right\}. \qquad (6)$$

kompleks o‘zgaruvchili funksiyasni ko‘rib chiqamiz, bu yerda $a\in(0,t_0)$. Demak, $\operatorname{Re} z\geq\alpha$ bo‘lganda

$$\left|\exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2 z\right\}\right|\leq\left|\exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2 \alpha\right\}\right|,$$

u holda bu yarim tekislikda (6) ning o‘ng tomonidagi qator tekis yaqinlashadi. Bu qatorning har bir hadi uchun analitik funksiya $\operatorname{Re} z\geq\alpha$ ekanligini hisobga olib, Veyershtras teoremasini qo‘llagan holda, $\Phi(z)=0$ funksiya $\operatorname{Re} z\geq\alpha$ uchun analitik ekanligini bilib olamiz.

(5) dan $\Phi(z)$ funksiyaning analitiklik sohasida yotuvchi, haqiqiy o‘qdagi $[t_0,t]$ kesmada $\Phi(z)=0$ ekanligi kelib chiqadi, u holda teoremadagi yagonalik xulosasi analitik funksiyalar uchun $\Phi(z)=0$, barcha z uchun , $\operatorname{Re} z\geq\alpha$ ekanligidan kelib chiqadi.

Shunday qilib, (5) tenglik barcha $t\geq t_0$ haqiqiy sonlar uchun bajariladi.Bu tenglikdan $t\to\infty$ bo‘lgandagi limitga o‘tsak, biz ketma-ket

$$\int_0^l \varphi(\xi)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi=0 \qquad (7)$$

$$\int_0^l \varphi(\xi)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi=1$$

tenglikni olamiz va quyidagi natijaga erishamiz.

$$\int_0^l \varphi(\xi)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi=0$$

$$\int_0^l \varphi(\xi)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi=1$$

$$\varphi(\xi)=\frac{2}{l}\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)$$

$\varphi(x)$ ni topib, $u(x,t)$ funksiyaga qo‘yamiz va natijaga erishamiz.

$$u(\mathrm{x},\mathrm{t})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)\mathrm{d}\,\xi\exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2a^2t\right\}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$$

$$\int_0^l\frac{2}{l}\varphi(\xi)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)\sin\left(\frac{\pi k}{l}\right)\mathrm{d}\,\xi=\begin{Bmatrix}1,n=k\\0,n\neq k\end{Bmatrix}$$

$$u(x,t)=\frac{4}{l^2}\exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2a^2t\right\}\sin\frac{\pi k}{l}x$$

$$\varphi(x)=\frac{4}{l^2}\sin\frac{\pi k}{l}x$$

Xulosa

Ushbu maqolada issiqlik tarqalish tenglamasi uchun teskari masala batafsil o‘rganilib, uning yechimi va nazariy asoslari tahlil qilindi. O‘zgaruvchilarni ajratish usuli yordamida yechim aniq va bosqichma-bosqich ifodalandi, shuningdek, o‘lchov nuqtasi segment oxirida joylashgan hol uchun yechimning yagonaligi matematik jihatdan isbotlandi. Bu teskari masalaning mustahkam nazariy poydevorini yaratishda muhim ahamiyat kasb etadi.Bundan tashqari, kompleks funksiyalar nazariyasi va Veyershtras teoremasi asosida yechim funksiyasining analitiklik xossalari tahlil qilindi. Ushbu yondashuv teskari masalalarning matematik xususiyatlarini chuqurroq tushunishga, ularning yechimlarini barqaror va aniq olishga yordam beradi.Olingan natijalar nafaqat issiqlik tarqalish tenglamasi uchun, balki umumiy teskari masalalar nazariyasi uchun ham muhim ilmiy ahamiyatga ega bo‘lib, ushbu masalalarning to‘g‘ri qo‘yilishi va yechimini ta’minlashda yangi yo‘nalishlar ochadi. Shuningdek, bu natijalar amaliy masalalarni hal qilishda, masalan, sanoat jarayonlarini optimallashtirish, materiallarni sinovdan o‘tkazish, ekologik monitoring va boshqa ko‘plab sohalarda qo‘llanilishi mumkin.Ushbu maqola “Nokorrekt va teskari masalalar” fani doirasida mustaqil o‘quv materiali sifatida tayyorlangan bo‘lib, talabalar va ilmiy izlanuvchilar uchun teskari masalalarning nazariy va amaliy jihatlarini tushunishda foydali bo‘ladi. Kelajakda ushbu mavzuni yanada kengaytirish va teskari masalalarning turli matematik va hisoblash usullarini qo‘llash orqali yanada samarali yechimlar ishlab chiqish istiqbollari mavjud.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. K.S.Fayazov, I.O.Xajiyev Nokorrekt va teskari masalalar(o‘quv qo‘llanma)
2. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for
3. solutions of elliptic partial differential equations satisfying general
4. boundary conditions. II. Comm. Pure Appl. Math. 17, 1964. P. 35-92.
5. Ames K.A., Straughan B. Non-Standard and Improperly Posed Problems.Academic Press, New York, 1997. 303 p.
6. Fayazov K.S. Hisoblash matematikasi, matematik fizika va analizning
7. nokorrekt masalalarini yechish usullari. Toshkent, O‘zMU, 2001. 100 b.
8. Fayazov K.S. Khajiev I.O. The ill-posed boundary value problem for a
9. high-order differential equation with the degeneration line. Problems of
10. Computational and Applied Mathematics. 2(39), 2022. P. 122-129