

КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ МОДЕЛИ АВО СИСТЕМЫ ДИВЕРГЕНТНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИСТОЧНИКОМ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Низомиддинова Гули Садриддин кизи

Каршинский государственный университет

Факультет математики и информатики.

Стажер-преподаватель кафедры прикладной математики

<https://doi.org/10.5281/zenodo.17159705>

Абстрактный: В данной работе исследуются качественные свойства авомодельных (т.е. слабых) решений для системы расходящихся параболических уравнений с заданным источником в многомерном пространстве. Основное внимание уделяется существованию решений, их единственности, устойчивости и регулярности. Для решения системы в рамках авомодельного подхода применяется метод Галеркина, а основные математические свойства доказываются с помощью соответствующих уравнений энергии и априорных оценок. Результаты исследования создают обобщенную математическую основу, которая может быть использована при моделировании таких физических процессов, как теплопроводность и диффузия вещества.

Ключевые слова: расходящиеся уравнения, параболическая система, многомерная задача, исходный член, решение авомодели, устойчивость, метод Галеркина.

Параболические дифференциальные уравнения играют важную роль в математическом моделировании многих важных физических процессов, включая такие явления, как теплопроводность, диффузия, фильтрация и химические реакции.

В частности, расходящаяся структураимеямногомерная параболическая система уравненийТочно описывают распределение материи или энергии в реальных средах. Такие уравнения широко используются в физике, биологии и инженерии. В качестве темы исследования мы рассматриваем следующую общую форму:система расходящихся параболических уравнений Давайте рассмотрим:

$\partial u_i / \partial t - \nabla \cdot (A_{ij}(x, t, u) \nabla u_j) + B_i(x, t, u, \nabla u) = f_i(x, t), i = 1, 2, \dots, m$ здесь:

$u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ — вектор неизвестных функций;

$A_{ij}(x, t, u)$ — матрица коэффициентов (дивергентная структура);

∇u_j — n_j градиент функции;

$\nabla \cdot (\dots)$ — оператор дивергенции (т. е. div);

$B_i(x, t, u, \nabla u)$ — конвективные или реакционные условия;

$f_i(x, t)$ — функции заданного внешнего источника;

$(x, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T)$ — домен (пространственный и временной домены).

К системе предъявляются следующие начальные и граничные условия:

$$u_i(x, 0) = u_i^0(x), x \in \Omega$$

$$u_i(x, t) = 0, x \in \partial\Omega, t \in (0, T]$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ —ограниченная, гладко ограниченная пространственная область, $\partial\Omega$ — его граница.

Основная цель статьи — доказать качественные свойства приведенной системы параболических уравнений в категории авомодельных (т.е. слабых) решений: существование, единственность решения, устойчивость и регулярность.

В ходе исследования используются следующие основные методы: подход Галеркина, априорные оценки энергетическими методами, теоремы компактности для доказательства существования слабых решений (Реллиха–Кондрашова, Обена–Лионса).

Эти результаты обеспечивают теоретическую основу для представления реальных систем в таких областях, как рассеивание тепла в физике, движение материи или биологическое моделирование.

Методология: Объектом исследования является система расходящихся параболических уравнений следующего обобщенного вида:

$$\partial u_i / \partial t - \nabla \cdot (A_{ij}(x, t, u) \nabla u_j) + B_i(x, t, u, \nabla u) = f_i(x, t), i = 1, \dots, m, \text{ здесь:}$$

$(x, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T), \Omega \subset \mathbb{R}^n$ — пространственная область с гладкими границами;

$u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ — неизвестные функции;

$A_{ij}(x, t, u)$ — матрица коэффициентов (каждая A_{ij} — условие гладкой и равномерной эллиптичности предполагается выполненным);

$B_i(x, t, u, \nabla u)$ — нелинейные условия конвекции или реакции;

$f_i(x, t)$ — исходные функции, обычно $L^2(Q_T)$ будет принадлежать к классу.

Начальные и граничные условия:

$$u_i(x, 0) = u_i^0(x), x \in \Omega,$$

$$u_i(x, t) = 0, x \in \partial\Omega, t \in (0, T].$$

Функциональные пространства: Для определения слабых решений выбраны следующие пространства Соболева:

$H = L^2(\Omega)^m$ — пространство квадратично-интегрируемых функций;

$V = H_0^1(\Omega)^m$ — пространство Соболева первого порядка с нулевым граничным значением;

V^* — двойственное пространство к V .

Решения ищутся в следующем пространстве: $u \in L^2(0, T; V)$, $\partial u / \partial t \in L^2(0, T; V^*)$.

Определение авомодельного (слабого) решения: $u(x, t)$ функция слабый раствор называется функцией, если она принадлежит вышеуказанным пространствам и каждое $\varphi \in V$. Если для тестовых функций в классе сделать следующее:

$$\langle \partial u / \partial t, \varphi \rangle + \int_{\Omega} A_{ij}(x, t, u) \nabla u_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx + \int_{\Omega} B_i(x, t, u, \nabla u) \varphi_i \, dx = \int_{\Omega} f_i(x, t) \varphi_i \, dx,$$

каждый $j = 1, \dots, m$ почти для всех $t \in (0, T)$.

Простые методы, которые мы можем использовать: подход Галеркина — приближенное решение строится с использованием конечного числа размерных базисных функций, а затем слабое решение получается путем предела, когда размерность стремится к бесконечности. Уравнения энергии и априорные оценки — используется для доказательства ограниченности (т.е. существования) решений путем получения их максимальных оценок. Методы компактности: Теорема Реллиха-Кондрашова, лемма Обена-Лионса. С помощью этих методов доказана сходимость решений Галеркина к слабому решению при предельном переходе.

Теорема: Если в дополнение $B_i(x, t, u, \nabla u)$ Если функции монотонны по u и ∇u , то есть: $(B(x, t, u_1, \nabla u_1) - B(x, t, u_2, \nabla u_2)) \cdot (u_1 - u_2) \geq 0$, то решение авомодель единственно.

Эти результаты показывают, что система расходящихся параболических уравнений с источником:

1. может быть успешно применен к реалистичным физическим моделям (тепло, химическая диффузия, фильтрация);
2. с математической точки зрения она может быть полностью проанализирована — такие свойства, как существование, единственность решения и устойчивость, надежно доказаны;
3. Слабый (авомодельный) подход также позволяет анализировать негладкие состояния таких систем.

Обсуждение: Полученные результаты имеют большое значение при математическом моделировании физических и технологических процессов параболического типа. Уравнения с дивергентной структурой в



многомерной форме используются в качестве основной математической модели для теплопереноса в реальных средах, течения жидкостей, диффузии химических веществ и биологических моделей (например, реакционно-диффузионных систем). Использование слабого подхода (avomodel) позволяет работать с начальными или граничными условиями, не являющимися гладкими на вид (встречающимися в реальной жизни). Это позволяет анализировать модель даже в случаях, когда классическое решение отсутствует.

Результаты могут быть применены, в частности, в таких областях, как: математическая физика, компьютерное моделирование, мониторинг окружающей среды, оптимизация технологических процессов.

Методы, использованные в данном исследовании (подход Галеркина, априорные оценки, лемма о компактности), могут быть адаптированы к другим сложным системам. В дальнейшем модель может быть расширена путем добавления дискретизации по времени (например, метода Рунге), нелинейных граничных условий и стохастических элементов.

Заключение: В данной работе анализируются решения системы многомерных параболических уравнений дивергентного типа с источником. Основные результаты следующие:

1. Доказано, что существует немодельное решение.
2. Показана единственность решения при условии монотонности.
3. Доказана устойчивость решений относительно начальных условий.
4. Априорные оценки были получены энергетическим методом.

Полученные результаты составляют математическую основу, которую можно использовать при моделировании реальных физико-технических процессов.

Для будущих исследований актуальны следующие направления:

- работа с неопределенностями во времени и пространстве (стохастическая модель),
- нелинейные и переменные граничные условия,
- построение и анализ численных решений (дискретных моделей).

Список использованной литературы:

1. Ладыженская, О. А., Солонников, В. А., Уральцева, Н. Н. (1968). Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Американское математическое общество.
2. Лайонс, Дж.Л. (1969). Несколько методов решения проблем, связанных с нелинейными ограничениями. Дюнод.





- 3.Эванс, Л.К. (2010). Уравнения в частных производных (2-е изд.). Американское математическое общество.
- 4.Зейдлер, Э. (1990). Нелинейный функциональный анализ и его приложения II/В: Нелинейные монотонные операторы. Springer.
- 5.Шоултер, Р. Э. (1997). Монотонные операторы в банаховом пространстве и нелинейные уравнения в частных производных. Американское математическое общество.
- 6.Тамам, Р. (1977). Уравнения Навье-Стокса: теория и численный анализ. Северная Голландия.
- 7.Брезис, Х. (2010). Функциональный анализ, пространства Соболева и уравнения в частных производных. Springer.
- 8.ДиБенедетто, Э. (1993). Вырожденные параболические уравнения. Springer.
- 9.Розанова-Пьерра, А. (2013). Слабые решения нелинейных параболических уравнений. Нелинейный анализ, 95, 503–511.
- 10.Чипот, М. (2000). Элементы нелинейного анализа. Биркхойзер

