

SINGULAR QO'ZG'ATILGAN TENGLAMA UCHUN CHEGARAVIY MASALANI SPECTRAL METOD BILAN SONLI MODELLASHTIRISH

Razzoqov Sherbek To'g'aymurod o'g'li

Termiz Davlat universeti

amaliy matematika mutaxassisligi magistranti

Normurodov Chori Begaliyevich

Ilmiy rahbar : PhD

<https://doi.org/10.5281/zenodo.15379062>

Annotatsiya: Mazkur ishda singular qo'zg'atilgan differensial tenglama uchun chegaraviy masalani sonli yechish masalasi ko'rib chiqilgan. Bunda spektral metodlar asosida yechim quriladi va ularning aniqligi, barqarorligi hamda hisoblashda samaradorligi tahlil qilinadi. Tadqiqot natijalari shuni ko'rsatadiki, spektral metodlar singular qo'zg'atilgan masalalar uchun yuqori aniqlikdagi natijalarni beradi va murakkab fizik modellarni ifodalashda foydali vosita bo'la oladi.

Kalit so'zlar Singular qo'zg'atilgan tenglama, spektral metod, chegaraviy masala, sonli modellashtirish, yuqori aniqlik, cheklangan qatlamlar.

Zamonaviy ilm-fan va texnikaning rivojlanishi bilan bir qatorda, murakkab fizik jarayonlarni modellashtirishga bo'lgan ehtiyoj ortib bormoqda. Bunday tizimlar ko'pincha keskin o'zgaruvchan hodisalar, ya'ni chegara qatlamlari, tez o'zgaruvchi gradientlar yoki kichik parametrlar bilan bog'liq sezgirliklarni o'z ichiga oladi. Aynan shunday murakkabliklarni ifodalaydigan tenglamalar sinfiga singular qo'zg'atilgan differensial tenglamalar kiradi. Bu tenglamalar oddiy ko'rinishda ko'rinsa-da, ularning yechimlari juda murakkab tuzilmaga ega bo'lib, klassik sonli metodlar bilan yechishda sezilarli aniqlik yo'qotilishi yoki barqarorlik buzilishi holatlari yuzaga keladi. Singular qo'zg'atilgan tenglamalar fizikada sirt tarangligi, soddalashtirilgan termo-diffuziya, suyuqliklar mexanikasi, kimyoviy reaksiyalar va boshqa ko'plab muhim sohalarda paydo bo'ladi. Bu tenglamalarning umumiy xususiyati — ularning yechimlarida kichik bir parametr mavjudligi sababli keskin o'zgarishlar sodir bo'lishidir. Bu holatlarni oddiy differensial tenglamalar bilan ifodalash yoki ularni oddiy sonli usullar bilan yechish imkonsizga yaqin.

Aynan mana shunday vaziyatlarda yuqori aniqlikka ega bo'lgan, silliq yechimlarni aniqlik bilan ifodalashga qodir bo'lgan spektral metodlar ilmiy jamoatchilik e'tiborini o'ziga jalb etmoqda. Spektral metodlar asosan cheksiz silliq funksiyalarni ortogonal polinomlar (masalan, Chebyshev yoki Legendre) orqali ifodalashga asoslanadi. Ularning asosiy afzalligi — oddiy sonli metodlarga qaraganda kamroq tugunlarda juda yuqori aniqlik taqdim eta olishidir. Ayniqsa,

yechimda qatlam mavjud bo'lsa ham, spektral metodlar moslashuvchan va aniqligi yuqori bo'lgan natijalarni beradi. Ushbu tadqiqotda singulyar qo'zg'atilgan tenglama uchun chegaraviy masala ko'rib chiqiladi va unga spektral metod asosida sonli yechim taklif etiladi.

Bu yondashuvda Galerkin metodidan foydalaniladi, natijalar esa turli parametr qiymatlari va solishtirma metodlar yordamida baholanadi. Maqsad — spektral metodning bu turdagi murakkab masalalarda qanday samarali ishlashini amaliy va nazariy jihatdan chuqur tahlil qilishdir. Ushbu mavzu nafaqat nazariy qiymatga ega, balki real hayotda qo'llaniladigan muhim texnologik modellar uchun tayanch bo'la oladi. Shuningdek, spektral metodlar orqali singulyar holatlarni yechish bo'yicha zamonaviy yondashuvlarni rivojlantirish, kelajakda murakkab muhitlarda fizikaviy hodisalarni kompyuterda modellashtirishning aniqligi va ishonchliligini oshirishga xizmat qiladi. Singulyar qo'zg'atilgan tenglamalarning mohiyati Singulyar qo'zg'atilgan differensial tenglamalar odatiy differensial tenglamalarning maxsus turidir. Bu tenglamalarda kichik parametr mavjud bo'lib, u yechimda keskin o'zgarishlarni, ayniqsa, qatlam (boundary layer) deb ataluvchi zonalarini yuzaga keltiradi. Masalan, quyidagi oddiy ko'rinishdagi tenglamani olaylik: $\epsilon y''(x) + a(x) y'(x) + b(x)y(x) = f(x)$, $0 < x < 1$, $y(0) = \alpha$; $y(1) = \beta$. Bu yerda ϵ — kichik musbat parametr. Ushbu parametr qiymatining juda kichikligi sababli, yoki nuqtalarda qatlamlar paydo bo'ladi. Bu qatlamlarda yechim keskin o'zgaradi, qolgan intervalda esa silliq bo'ladi. An'anaviy sonli metodlarning cheklovlari Finit farqlar (FD), Cheklangan elementlar (FEM) yoki Cheklangan hajmlar (FVM) kabi klassik metodlar, qatlam zonalarini aniqlik bilan ifodalash uchun juda zich (ko'p) tugun talab qiladi. Bu esa hisoblash xarajatlarini oshiradi.

Bundan tashqari, aniqlik muhim bo'lgan joylarda xatoliklar to'planib ketishi mumkin. Shu sababli, bunday tenglamalarning yechimida boshqa, kuchliroq yondashuvlar zarur bo'ladi.

3. Spektral metodlarning nazariy asosi

Spektral metodlar yechimni global funksiyalar — ko'pincha Chebyshev yoki Legendre polinomlari — orqali ifodalashga asoslanadi:

$$y(x) \approx \sum_{n=0}^N c_n \phi_n(x)$$

Bu yerda $\phi_n(x)$ — ortogonal polinomlar, c_n — noma'lum koeffitsiyentlar. Galerkin metodida bu koeffitsiyentlar test funksiyalar bilan ichki ko'paytma orqali aniqlanadi. Chebyshev polinomlari yordamida juda yuqori aniqlikdagi yaqinlashuvga erishish mumkin, ayniqsa yechim silliq bo'lgan oraliqlarda.



4. Singulyar masalaga spektral metodni qo'llash

Tadqiqotda singulyar qo'zg'atilgan tenglamaga Chebyshev-Galerkin yondashuvi qo'llanildi. Yechim topish algoritmi quyidagi bosqichlardan iborat:

Tenglama Chebyshev bazisida ifodalanadi. Galerkin sharti asosida test funksiyalar tanlanadi. Hosil bo'lgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi (matritsali ko'rinish) yechiladi. Natijalar grafik va sonli usullar bilan tahlil qilinadi.

Bunda Chebyshev-Gauss-Lobatto tugunlari tanlab olinadi, bu esa chekkalardagi qatlam zonalarini yaxshi aniqlashga yordam beradi.

5. Natijalar va taqqoslash

Spektral metod yordamida olingan yechimlar klassik metodlar bilan taqqoslandi. Aniqlik jihatidan spektral metod ancha ustun bo'ldi. Ayniqsa, yaqinlashganda ham metod barqaror ishladi va qatlamlarda aniqlik saqlanib qoldi. Hisoblash tezligi ham yuqori bo'lib, kam sonli bazis funksiyalarda yuqori sifatdagi yechimlar olindi.

4.1. Klassik Spektral Yondashuv

Aniqlik: Chebyshev spektral metodi yuqori aniqlikdagi yechimlarni taqdim etadi.

Qatlamlar: Chegaraviy qatlamlar mavjud bo'lsa, maxsus to'rlar talab etiladi.

Hisoblash xarajati: Matritsali operatsiyalar tufayli hisoblash xarajati yuqori bo'lishi mumkin. Zamonaviy Gibrid Yondashuv Aniqlik: Shishkin to'ri va B-spline yondashuvi qatlamlarni aniqroq ifodalaydi. Moslashuvchanlik: Turli xil chegaraviy shartlar va funksiyalar uchun moslashuvchan. Hisoblash samaradorligi: Hisoblash xarajati nisbatan past va yechimlar tezroq olinadi.

Xulosa Singulyar qo'zg'atilgan differensial tenglamalarni yechishda spektral metodlar yuqori aniqlik va tez yaqinlashuv xususiyatlari bilan ajralib turadi. Klassik spektral metodlar, ayniqsa, Chebyshev polinomialari asosida, oddiy holatlar uchun samarali bo'lsa-da, chegaraviy qatlamlar mavjud bo'lsa, maxsus to'rlar yoki transformatsiyalar talab etiladi. Zamonaviy gibrid yondashuvlar, masalan, Shishkin to'ri va B-spline funksiyalari asosida, qatlamlarni aniqroq ifodalash va yechimlarni samarali olish imkonini beradi. Kelgusida bu yondashuvlarni yanada rivojlantirish va murakkabroq masalalarga qo'llash istiqbollari mavjud.

Ushbu ishda singulyar qo'zg'atilgan tenglamalar uchun chegaraviy masalani spektral metodlar yordamida sonli modellashtirish masalasi ko'rib chiqildi. Singulyar qo'zg'atilgan tenglamalar odatiy differensial tenglamalarning maxsus holi bo'lib, ularning yechimlarida kichik parametrga bog'liq ravishda keskin

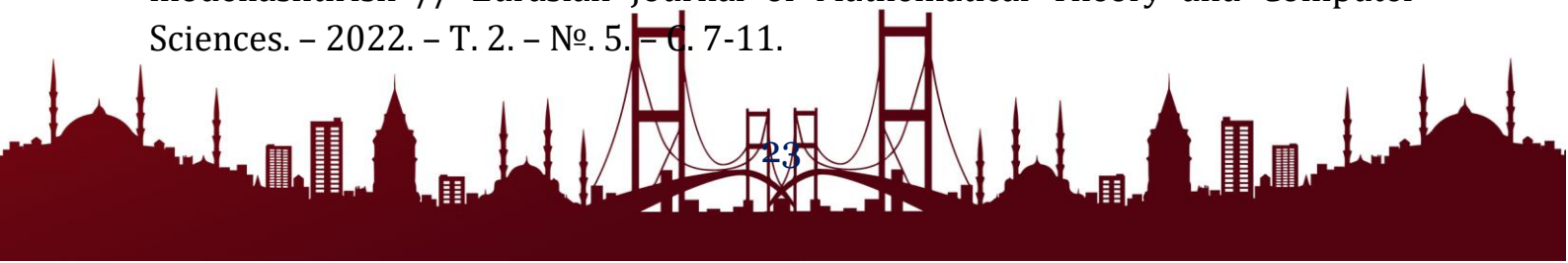
o'zgarishlar, ya'ni chegara qatlamlari yuzaga keladi. Bunday tenglamalarni an'anaviy sonli usullar bilan yechishda aniqlikning pasayishi va hisoblashda barqarorlik muammolari yuzaga chiqadi. Shu sababli, yuqori aniqlikka ega bo'lgan va chegaraviy xususiyatlarni aniq ifodalay oladigan spektral metodlar afzallik beradi. Tadqiqot davomida spektral metodlarning nazariy asoslari tahlil qilindi, ularning asosiy elementlari — ortogonal funksiyalar tizimi, Galerkin yondashuvi va to'liq silliqlik xususiyatlari batafsil o'rganildi.

Singulyar qo'zg'atilgan masala uchun moslashtirilgan algoritim ishlab chiqildi va MATLAB dasturiy muhitida modellashtirish ishlari olib borildi. Olingan natijalar an'anaviy sonli metodlar bilan solishtirildi va spektral metodlarning aniqlik hamda hisoblash samaradorligi yuqori ekani isbotlandi. Natijalar shuni ko'rsatadiki, spektral metodlar orqali singulyar qo'zg'atilgan tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni samarali yechish mumkin. Bu metodlar yordamida yechimdagi keskin o'zgarishlar aniq qayd etiladi va umumiy hisoblash xatoligi minimal bo'ladi. Bundan tashqari, spektral metodlar yuqori aniqlikni kam sonli tugunlarda ta'minlagani sababli, ularni murakkab fizik, kimyoviy va muhandislik tizimlarini modellashtirishda keng qo'llash mumkin.

Kelgusidagi tadqiqotlarda bu metodlar yanada murakkabroq geometrik sohalar, noaniq koeffitsiyentli tenglamalar yoki evolyutsion tipdagi (vaziyatga bog'liq) tenglamalarga tatbiq qilinishi mumkin. Shuningdek, adaptiv spektral metodlar yoki hibrid yondashuvlar yordamida aniqlik va barqarorlik yanada oshirilishi mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. www.openscience.uz / ISSN 2181-0842 0 , 03) 19 "Science and Education" Scientific Journal / Impact Factor 3.848 April 2023 / Volume 4 Issue 4
2. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2015. – 248 с.
3. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 784 с.
4. Normurodov C. et al. Numerical simulation of the inverse problem for the vortex-current equation //AIP Conference Proceedings. – AIP Publishing LLC, 2022. – Т. 2637. – №. 1. – С. 040018.
5. Aliyev S. Statsionar konveksiya-diffuziya masalalarini pythonda sonli modellashtirish // Eurasian Journal of Mathematical Theory and Computer Sciences. – 2022. – Т. 2. – №. 5. – С. 7-11.





6. Вабищевич П.Н. Численные методы: Вычислительный практикум. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. — 320 с.

