



NOSTANDART OLIMPIADA MASALALARINI YECHISH USULLARI HAQIDA

Quromboyev Hamdambek Nuraddinovich

Chirchiq davlat pedagogika universiteti o'qituvchisi

E-mail: hamdambek2020@mail.ru

<https://doi.org/10.5281/zenodo.7092405>

Respublikamiz ta'lim – tarbiya tizimida qator o'zgarishlar amalga oshirilgan bo'lib, ularning asosiy maqsadi yosh avlodni layoqati, qobiliyati, iqtidorini aniqlash, ochish va ularning rivojlanishi uchun shart – sharoit va imkoniyatlarni yaratishdan iboratdir.

Bular o'quvchilarni fanga bo'lgan qiziqishini shakllantirish, faolligini oshirish va ularni rag'batlantirish bilan bog'liqdir. Olimpiada ishtirokchilarning ijodiy faolligini o'stirishda, tafakkur jarayonlarini shakllantirishda mantiqiy fikrlash, matematikadan nostandart masalalarni yechish alohida ahamiyat kasb etadi.

Iqtidorli talabalarning fanlardan egallagan bilimlari qanchalik chuqur va mustahkamligini, ularning ijodiy fikrlash doirasining kengligini aniqlovchi mezonlardan biri olimpiadadir. Quyida olimoiadaga doir nostandart masalalarni yechish usullarini keltiramiz.

1. Agar $I + AB$ matritsaning teskarisi mavjud bo'lsa, $I + BA$ matritsaning ham teskarisi mavjud bo'lishini isbotlang. (I - birlik matritsa)

Agar $I + AB$ matritsaning teskarisi mavjud bo'lsa, u holda $\det(I + AB) \neq 0$ Bizdan $\det(I + BA) \neq 0$ ekanligini ko'rsatish talab etiladi.

Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

1-hol. A -teskarilantiruvchi ya'ni, $\det A \neq 0$. Ravshanki,

$$I + AB = AA^{-1} + AB = A(A^{-1} + B) \text{ va}$$

$$I + BA = A^{-1}A + BA = (A^{-1} + B)A$$

Bu tengliklardan quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\det(I + AB) = \det A(A^{-1} + B) = \det A \cdot \det(A^{-1} + B)$$

$$\det(I + BA) = \det(A^{-1} + B)A = \det(A^{-1} + B) \cdot \det A$$

Demak, $\det(I + BA) = \det(I + AB) \neq 0$.

2-hol. $\det A = 0$. Yuqoridagi teorema ko'ra, $\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ va $A_{\lambda} \in \mathbb{C}[m \times m]$ topilib $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ uchun $\det A \neq 0$ va $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \det A_{\lambda} = \det A$ bo'ladi. A_{λ}

teskarilantiruvchiligidan, 1-holga ko'ra, $\det(I + A_{\lambda}B) = \det(I + BA_{\lambda})$

tenglik o'rinli.





Determinant uzluksiz funksiya ekanidan foydalanib, $\lambda \rightarrow 0$ da limitga o'tamiz va quyidagilarni hosil qilamiz.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \det(I + A_{\lambda} B) = \det \lim_{\lambda \rightarrow 0} (I + A_{\lambda} B) = \det(I + A B)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \det(I + B A_{\lambda}) = \det \lim_{\lambda \rightarrow 0} (I + B A_{\lambda}) = \det(I + B A)$$

Demak, $\det(I + BA) = \det(I + AB) \neq 0$

Yuqoridagi natijalardan $\det(I + BA) \neq 0$ ekanligi kelib chiqdi. Bu esa $I + BA$ matritsaning teskarilantuvchiligini bildiradi. Isbot tugadi.

2. Quyidagi limitni hisoblang

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} (A^n - E) \right)$$

Bu yerda $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{n} \\ -\frac{x}{n} & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & \frac{x}{n} \\ -\frac{x}{n} & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 + \frac{x^2}{n^2} = 0$$

$$\lambda - 1 = \pm i \frac{x}{n}$$

$\lambda_1 = 1 + i \frac{x}{n}, \lambda_2 = 1 - i \frac{x}{n}$ xos qiymatlarni $\lambda_1 = 1 + i \frac{x}{n}$ xos qiymatga mos keluvchi xos

vektorni topamiz:

$$\begin{pmatrix} -i \frac{x}{n} & \frac{x}{n} \\ -\frac{x}{n} & -i \frac{x}{n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-i \frac{x}{n} a_1 + \frac{x}{n} a_2 = 0$$

$$a_2 = i a_1$$

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ xos vektorlar bo'ladi.}$$





$\lambda_2 = 1 - i\frac{x}{n}$ xos qiymatga $\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ xos vektor mos keladi. Ushbu $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ matritsani tuzib olamiz. $C^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ bo'ladi.

$$C^{-1} \cdot A \cdot C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{n} \\ -\frac{x}{n} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+i\frac{x}{n} & 1-i\frac{x}{n} \\ -\frac{x}{n}+i & -\frac{x}{n}-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i\frac{x}{n} & 0 \\ 0 & 1-i\frac{x}{n} \end{pmatrix} = J$$

Demak, $A = C \cdot J \cdot C^{-1}$

$$A^2 = C \cdot J \cdot C^{-1} \cdot C \cdot J \cdot C^{-1} = C \cdot J^2 \cdot C^{-1},$$

$A^k = C \cdot J^k \cdot C^{-1}$ bo'lsin deb faraz qilib, $A^{k+1} = C \cdot J^{k+1} \cdot C^{-1}$ bo'lishini ko'rsatamiz:

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = C \cdot J^k \cdot C^{-1} \cdot C \cdot J \cdot C^{-1} = C \cdot J^{k+1} C^{-1}$$

Demak, ixtiyoriy n uchun

$$A^n = C \cdot J^n \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left(1+i\frac{x}{n}\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(1-i\frac{x}{n}\right)^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

$$B = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{ix} & 0 \\ 0 & e^{-ix} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} (A^n - E) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} (B - C \cdot C^{-1}) =$$

$$C \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \frac{e^{ix}-1}{x} & 0 \\ 0 & \frac{e^{-ix}-1}{x} \end{pmatrix} \cdot C^{-1} = C \cdot \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \cdot i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & -i \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Javob: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Adabiyotlar:

1. Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Москва, 1997.
2. В. А. Садовничий, А. А. Григорян, С. В. Конягин. Задачи студенческих математических олимпиад. Москва, 1987.
3. Е. А. Морозова, И. С. Петраков, В. А. Скворцов. Международные математические олимпиады. Москва, 1976.
4. Сборник задач студенческих олимпиад по высшей математике. МИНСК, 2012.

