SETKALI FUNKSIYALAR FAZOLARI VA DIFFERENSIAL OPERATORLARNING FARQLI APPROKSIMATSIYASI

Akbaraliyeva Zarrina
Farg'ona Davlat Universiteti
Amaliy matematika va informatika mutaxassisligi 1-bosqich talabasi
https://doi.org/10.5281/zenodo.17934309

Annotatsiya: Ushbu maqolada setkali funksiyalar fazolarini qurishning asosiy tamoyillari, uzluksiz va diskret holatdagi normlarni moslashtirish hamda chiziqli differensial operatorlarni farqli usulda approksimatsiyalash usullari ko'rib chiqiladi. Farqli sxemalarning yaqinlashuvchanligi, aniqligi va barqarorligi masalalari chekli o'lchovli fazolarda o'rganiladi.

Differensial tenglamalarni sonli yechish usullari ko'pincha masalaning uzluksiz ko'rinishidan diskret ko'rinishga o'tishga asoslangan. Bu o'tish setkali soha joriy etish va asl uzluksiz funksiyalarni yaqinlashtiradigan setkali funksiyalar fazosini qurish orqali amalga oshiriladi.

Ushbu maqolada ikki o'zaro bog'liq jihat ko'rib chiqiladi:

1.Setkali funksiyalar fazolarini qurish va normlarni moslashtirish.

2.Differensial operatorlarni ularning farqli analoglari orqali approksimatsiyalash.

Asosiy maqsad – setkali yechimning aniq yechimga yaqinligi tushunchasini rasmiylashtirish va diskret modelga o'tishning to'g'riligini ta'minlashdir.

Setkali funksiyalar fazosi va proyeksiyalash operatori

Faraz qilaylik, H_0 ma'lum bir sohada aniqlangan uzluksiz funksiyalar fazosi bo'lsin.

ω_h setkasi, x_i tugunlaridan tashkil topgan, joriy etiladi. Setkali funksiyalar fazosi H_h faqat setka tugunlarida aniqlangan funksiyalardan iborat.

Har bir $u(x) \in H_0$ funksiyaga setkali funksiya $u_h(x)$, $x \in \omega_h$ mos qo'yiladi, shunda $u_h = \mathrm{P}_h u \in H_h$ bo'ladi, bu yerda P_h – H_0 dan H_h gacha bo'lgan chiziqli operator. Ushbu operator turli usullar bilan aniqlanishi mumkin:

- Agar $u(x)$ uzluksiz bo'lsa, odatda $u_h(x_i) = u(x_i)$ deb qabul qilinadi.
- Umumiyroq holatda $u_h(x_i)$ $u(x)$ ning tugun atrofidagi (masalan, diametri $O(h)$ bo'lgan) o'rtacha integral qiymati sifatida aniqlanishi mumkin.

Keyingi mulohazalarda $u(x)$ uzluksiz va barcha $x_i \in \omega_h$ uchun $u_h(x_i) = u(x_i)$ deb faraz qilinadi.

Uzluksiz va diskret fazolardagi normlarni moslashtirish

Setkali funksiya y_h ning uzluksiz u funksiyaga yaqinligini baholash uchun $\|y_h - u_h\|_h$ farq normi qo'llaniladi, bu yerda $\|\cdot\|_h$ – H_h dagi norma. Diskret fazodagi norma quyidagi ma'noda uzluksiz fazodagi normani yaqinlashtirishi talab qilinadi:

$$\lim_{h\to 0}\|u_h\|_h = \|u\|$$

har qanday $u \in H_0$ uchun. Bu shart normalarni moslashtirish sharti deb ataladi.

Amaliyotda ko'pincha integral normlarning diskret analoglari qo'llaniladi, masalan:

$$\|u_h\|_h = \left(h\sum_{x_i\in\omega_h}|u_h(x_i)|^p\right)^{1/p}, \quad p \geq 1$$

,

bu $h \to 0$ da mos keladigan uzluksiz normaga intiladi.

Differensial operatorlarni farqli approksimatsiyalash

Faraz qilaylik, $v(x)$ funksiyaga ta'sir etuvchi L chiziqli differensial operator berilgan. Lv ifodasidagi hosilalarni farqli nisbatlar bilan almashtirib, biz setkali v_h funksiyaga ta'sir etuvchi farqli operator L_h ni olamiz.

Farqli operator odatda andaza deb ataladigan tugunlar to'plamidagi v_h qiymatlarining chiziqli kombinatsiyasi shaklida yoziladi:

$L_hv_h(x)$ = X $A_h(x,\xi)v_h(\xi)$,

$\xi \in \Pi(x)$

yoki indeksli shaklda:

$(Lhvh)i$ = X $Aijvh(xj)$,

$j \in \Pi(i)$

bu yerda $\Pi(i)$ – x_i tuguni bilan bog'liq andaza, A_{ij} koeffitsientlari esa setka qadami

h ga bog'liq.

4.1. Farqli approksimatsiyalarga misollar

Birinchi tartibli hosilani approksimatsiyalash

- O'ng farqli hosila:

$$u'(x_i) \approx \frac{u_{i+1}-u_i}{h}$$

- Chap farqli hosila:

$$u'(x_i) \approx \frac{u_i-u_{i-1}}{h}$$

- Markaziy farqli hosila (ikkinchi tartibli aniqlik):

$$u'(x_i) \approx \frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}$$

Ikkinchi tartibli hosilani approksimatsiyalash

$$u''(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

Approksimatsiya xatosi va aniqlik tartibi

Agar etarlicha silliq v funksiya uchun bajarilsa, farqli operator L_h differensial operator L ni m tartibida approksimatsiyalaydi, deyiladi:

$$|Lv(x_i) - L_h v_h(x_i)| = O(h^m), \quad h \to 0.$$

Approksimatsiya tartibi andaza va farqli sxema koeffitsientlarini tanlash bilan belgilanadi.

Xulosa

Differensial tenglamalarni sonli yechish uchun farqli sxemalarni qurish ikki asosiy bosqichni o'z ichiga oladi:

1.Setkali funksiyalar fazosini to'g'ri aniqlash va normlarni moslashtirish.

2.Differensial operatorlarni talab qilinadigan aniqlik tartibida farqli approksimatsiyalash.

Normalarni moslashtirish sharti diskret normaldagi xato bahosining uzluksiz holatga mos kelishini kafolatlaydi. Farqli approksimatsiyalash differensial masalani algebraik tenglamalar sistemasiga almashtirishga imkon beradi, uning yechimi esa so'ralayotgan funksiyaning setka tugunlaridagi yaqin qiymatini beradi.

Farqli sxemalar nazariyasining keyingi rivojlanishi turli sinf tenglamalar uchun algoritmlarning barqarorligi, yaqinlashuvchanligi va samaradorligini o'rganish bilan bog'liq.

Adabiyotlar:

1.Самарский А. А., Гиляров А. В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
2.Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1989.
3.Рябенький В. С., Филиппов А. Ф. О разностных схемах. — М.: Наука, 1971.